Correction du DM n$^{\text{o}}$1

Exercice 1

1. (a) $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \mapsto \mathrm{e}^{x/2}$ l'est aussi.

   $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.

   On en conclut que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, pour tout x dans $]0;+\infty[$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x/2}\sqrt{x} - \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x/2}\sqrt{x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x/2}\,x}{2\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{x/2}}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-1}{2x} f(x)
\end{aligned}
$$

   (b) Pour tout réel $x > 0$ on a $\mathrm{e}^{x/2}$ et $\sqrt{x} > 0$ donc $f(x) > 0$. On a aussi $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $x - 1$, d'où le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   avec en 0 :

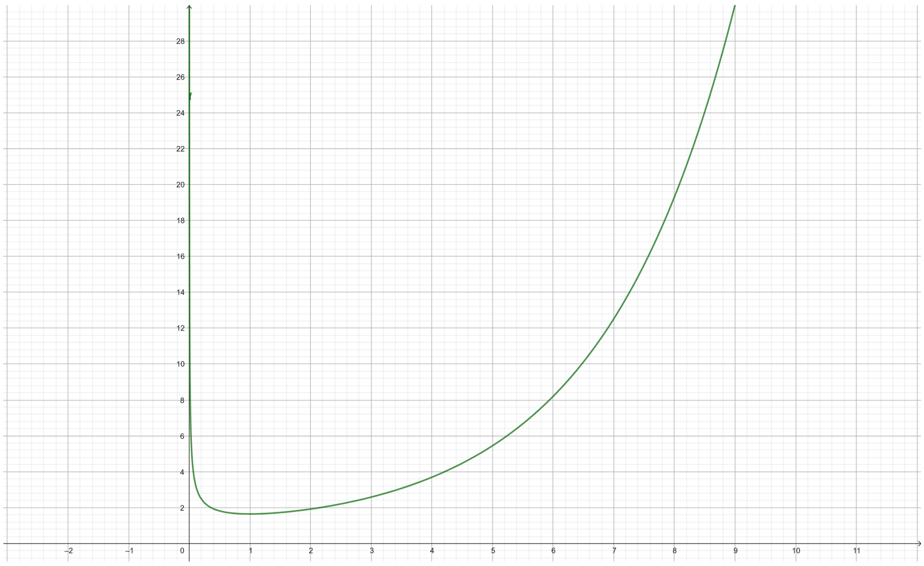
$$
\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x/2} = 1 \quad \text{donc par quotient} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty
$$

   et en $+\infty$:

$$
\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{\sqrt{X}} = +\infty \quad \text{par croissance comparée, donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x/2}} = +\infty
$$

   et comme $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x/2}}$ on en déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) D'après la question précédente :



(d) On a $f(1) = \mathrm{e}^{1/2}$ et on sait que $1 < 2 < \mathrm{e} < 3 < 4$ donc que

$$1 < \sqrt{2} < \mathrm{e} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$

donc $1 < f(1) < 2$.

- ▷ f est continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle d'après la question 1.(a).
- ▷ f est strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ d'après la question 1.(b)
- ▷ Pour tout entier $n \geqslant 2$, comme $f(1) < 2$ on a $n \in]f(1); \lim\limits_{x\to 0} f(x)[$ et $n \in]f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, on en déduit donc que l'équation $f(x) = n$ a exactement deux solutions dans $]0;+\infty[$, l'une dans $]0;1[$ et l'autre dans $]1;+\infty[$. On note u_n la solution dans $]0;1[$ et v_n la solution dans $]1;+\infty[$ et on a ainsi :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $f(v_n) = n \leqslant n+1 = f(v_{n+1})$. De plus, v_n et v_{n+1} sont dans $]1;+\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle, donc $v_n \leqslant v_{n+1}$. On a montré que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant v_{n+1}$$

donc $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

(b) (v_n) est croissante donc soit elle tend vers $+\infty$, soit elle converge vers un réel. Raisonnons par l'absurde et supposons que (v_n) ne tend pas vers $+\infty$, alors elle converge, notons ℓ sa limite réelle.

Comme f est continue sur $]1;+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\ell)$ avec $f(\ell) \in \mathbb{R}$. Or $f(v_n) = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, contradiction. On en conclut que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $f(u_n) = n \leqslant n+1 = f(u_{n+1})$. De plus, u_n et u_{n+1} sont dans $]0;1[$ et f est décroissante sur cet intervalle, donc $u_n \geqslant u_{n+1}$. On a montré que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

4. (u_n) est décroissante d'après la question précédente, et minorée par 0 car pour tout $n \geqslant 2$, $0 < u_n < 1$. On en déduit que (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
5. Supposons que $\ell \neq 0$, alors $\ell > 0$. Comme f est continue sur $]0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ avec $f(\ell) \in \mathbb{R}$. Or $f(u_n) = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$, contradiction. On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $f(u_n) = n$ donc

$$\frac{\mathrm{e}^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n$$

donc

$$\mathrm{e}^{u_n/2} = n\sqrt{u_n}$$

donc

$$\mathrm{e}^{u_n} = n^2 u_n$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{u_n} = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel fixé. Notons, pour tout entier p avec $p \geqslant n$:

$$\mathcal{P}(p) \quad : \quad \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$$

- **Initialisation :** Pour $p = n$, on a $\sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ d'une part, et $\binom{n+1}{n+1} = 1$ d'autre part, donc on a bien :

$$\sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

- **Hérédité :** Soit p un entier supérieur ou égal à n tel que :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{p+1} \binom{k}{n} &= \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} + \binom{p+1}{n} \\
&= \binom{p+1}{n+1} + \binom{p+1}{n} \\
&= \binom{p+2}{n+1} && \text{d'après la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout entier p tel que $p \geqslant n$ on a : $\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\
&= ((-1)+1)^n && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= 0^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{k/2}} \binom{n}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^k}{2^{k/2}} && \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^k 1^{n-k} \\
&= \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right)^n && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \left(\frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \geq 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= \frac{kn!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

   (b) On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{d'après la question précédente} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
&= n2^{n-1} && \text{d'après une formule de cours}
\end{aligned}$$

3. (a) On a $f(x) = (1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ d'après la formule du binôme. On en déduit que d'une part :

$$\forall x \neq -1, \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

   et d'autre part en dérivant terme à terme dans la somme :

$$\forall x \neq -1, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$$

   donc :

$$\forall x \neq -1, \quad \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}\binom{n}{k} = n(1+x)^{n-1}$$

(b) L'égalité précédente est valable pour tout $x \neq -1$, donc en posant $x = 1$ on obtient :

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

et on retrouve le résultat précédent.

4. En dérivant une seconde fois f on obtient d'une part :

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, en dérivant terme à terme dans la somme $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}\binom{n}{k}$:

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2}\binom{n}{k}$$

d'où l'égalité :

$$\boxed{\forall x \neq -1, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2}\binom{n}{k} = n(n-1)(1+x)^{n-2}}$$